ΛΥΣΕΙΣ (ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 22)

① (i) Πρόκειται για την ανισότητα Bernoulli;

Αν $n=1 \Rightarrow 1+x=(1+x)^1 \geq 1+1\cdot x$

Το ζητούμενο ισχύει



Υποθέτουμε ότι $(1+x)^k \geq 1+kx$

Επαγωγική Υπόθεση

Θδο $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$

Έχουμε:

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)\cdot(1+x)^k \underset{1+x>}{\geq} (1+x)\cdot(1+kx)$$

$$= \underbrace{1+(k+1)x}_{>0} + \underbrace{kx^2}_{\geq 0} > 1+(k+1)x$$

Άρα, η επαγωγή λέει ότι

$\forall n \in \mathbb{N}$ ισχύει $(1+x)^n \geq 1+nx$, $x>-1$

(ii) $\quad \alpha_n \xrightarrow{n} \ell \in \mathbb{R} \overset{op.}{\iff} \forall \varepsilon>0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 : |\alpha_n - \ell| < \varepsilon$

$\square$

(2)

(i) Βλέπε Θέμα 2 ερώτημα (i)

Λύσεις εξεταστικής Ιανουαρίου 2022.

(ii) Θδο $f(x) = x^2,\ \forall x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

Εστω λοιπον $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Απ' το (i) υπάρχει ακολουθία

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ρητών αριθμών τ.ω

$x_n \xrightarrow{n} x$. Αφου $f$ συνεχής, απο

την Αρχή της Μεταφοράς, ισχύει

$$\underbrace{f(x_n)}_{\overset{\text{Υπόθ}}{=} x_n^2} \xrightarrow{n} f(x) \ . \quad (1)$$

ΔΗΜΟΓΛΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

Τώρα η $x^2$ είναι συνεχής συνάρτηση

στο $\mathbb{R}$. Άρα, από την Αρχή της

Μεταφοράς, ισχύει η συνεπαγωγή

$$x_n \xrightarrow{n} x \implies x_n^2 \xrightarrow{n} x^2 \quad (2)$$

Απ' τη μοναδικότητα του ορίου

ακολουθίας και τις (1), (2), πρέπει:

$$f(x) = x^2.$$

Συνεπώς, δείξαμε ότι $f(x)=x^2, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

Ιδιαίτερα, αν $x=\sqrt{2} \implies f(\sqrt{2})=2$. □

3 Θεωρούμε τη $g:[0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = f(x) - f(x+1), \quad x \in [0,1]$$

Η $g$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως

διαφορά συνεχών συναρτήσεων. στο $[0,1]$

Επίσης, $g(0) = f(0) - f(1) = a \neq 0$ (1)

και $g(1) = f(1) - f(2)$

$$\overset{(1)}{=} \cancel{f(0)} - a - \cancel{f(2)} = -a \neq 0.$$

Αφού $g(0) \cdot g(1) = -a^2 < 0$, απ' το

Θεώρημα Bolzano (ή Θ.Ε.Τ), υπάρχει

$x_0 \in (0,1)$ τ.ω $g(x_0) = 0$ ή αλλιώς

$f(x_0) = f(x_0+1)$. □

ΔΗΜΟΓΛΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

4 Υποθέτουμε ότι $f$ όχι σταθερή.

Άρα, $\exists\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$ τ.ω

$f(x_1) \neq f(x_2)$ και $f(x_1), f(x_2) \in \mathbb{Q}$.

Εφόσον $f$ συνεχής τότε απ' το

Θ.Ε.Τ. $\exists\, \xi$ ανάμεσα απ' τα

$x_1$ και $x_2$ τ.ω $f(\xi) = r$,

όπου $r$ ένας κατάλληλος άρρητος

αριθμός ανάμεσα απ' τις τιμές

$f(x_1)$ & $f(x_2)$ (τέτοιος άρρητος υπάρχει

γιατί οι άρρητοι είναι πυκνοί στους

πραγματικούς αριθμούς). Αυτό είναι άτοπο

αφού $f(x) \in \mathbb{Q}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

ΔΗΜΟΓΛΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

(5) (i) Μια $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ λέγεται παραγωγίσιμη σε κάποιο $\alpha\in\mathbb{R}$, αν το όριο

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in\mathbb{R}$$

Ορίζουμε επίσης παράγωγο της $f$ στο $\alpha$ τον <u>πραγματικό</u> <u>αριθμό</u>:



$$f'(\alpha)=\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$$

(όταν φυσικά το όριο είναι πεπερασμένο).

(ii) Εφόσον $\exists\, f'(0)=2$, αυτό σημαίνει ότι $\forall\,(x_n)\subset\mathbb{R}$ τ.ω $x_n\to 0$ ισχύει

$$\lim_{n}\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0}=2.$$

(από Αρχή Μεταφοράς για Όρια)

Επιλέγοντας $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ αφού

$$x_n \xrightarrow{n} 0 \Rightarrow \lim_{n} \frac{f(\frac{1}{n}) - \cancel{f(0)}}{\frac{1}{n} - 0} = \ell$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n} \left( n \cdot f\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \ell \qquad \square.$$

ΔΗΜΟΓΛΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ